OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ - BRĂILA, 22 februarie 2015
CLASA A XII-A

1. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcție care admite primitive și F o primitivă a sa. Determinați funcția f astfel încât $\left(e^{2x}+1\right)\left(f(x)-F(x)\right)=e^{2x},\forall x\in\mathbb{R}$.

Costel Cerchez, Brăila

2. Fie $G=\left(\frac{1}{k},k\right)$, $k>1$ și legea de compoziție:

$$x*y=\frac{\frac{k^2+1}{k}xy-2(x+y)+\frac{k^2+1}{k}}{2xy-\frac{k^2+1}{k}(x+y)+\frac{k^4+1}{k^2}},\ \forall x,y\in G.$$

Să se arate că:

a) $(G,*)$ este grup;

b) Să se calculeze $x^{(n)}$, $n\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\}$ și să se determine părțile stabile finite ale lui $(G,*)$;

c) Să se determine un automorfism strict descrescător al lui $(G,*)$.

Gheorghe Alexe, Brăila

3. Fie $(G,\bullet)$ un grup finit de ordin impar și H un subgrup propriu, necomutativ, al lui G. Să se arate că există două elemente distincte din $G\setminus H$ care comută.

Gazeta matematică

4. Să se calculeze $\int\frac{\sin 2x-tg^2x}{e^{tgx}+\sin^2 x}dx$, $x\in\left(\frac{\pi}{24},\frac{\pi}{3}\right)$.

Narcis Gabriel Turcu, Brăila